

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО «СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



УТВЕРЖДАЮ:

Директор НОЦ «Институт
непрерывного образования»

Е.В. Мошкина

« _____ 2022 г.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПРОГРАММА
ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

«Пакеты прикладных программ по алгебре и теории чисел,
GAP (Группы, алгоритмы, программирование)»

Красноярск 2022

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

1.1. Аннотация программы

Знание основ применения систем компьютерной алгебры и приобретение опыта работы с некоторыми из них стало сегодня зачастую необходимым инструментом создания доказательства, полезно при проверке результатов и для приложений. Находят системы символьного программирования своё место в преподавании классических разделов математики.

Программа повышения квалификации нацелена на приобретение и углубление знаний слушателей о современных методах решения задач алгебры и в первую очередь теории групп, а также связанных с ними задач геометрии многогранников.

1.2. Цель программы

Цель программы повышения квалификации – совершенствование профессиональных компетенций преподавателей вуза, учителей математики и аспирантов в использовании современных алгебраических и геометрических методов вместе с применениями систем компьютерной алгебры для работы с обучающимися в основном и дополнительном математическом образовании на разных ступенях обучения.

1.3. Компетенции (трудовые функции) в соответствии с Профессиональным стандартом (формирование новых или совершенствование имеющихся)

В условиях отсутствия действующих профессиональных стандартов в профессиональном образовании предполагается реализовать в данной программе подготовку к выполнению трудовых функций, представленных ниже (с учетом требований, сформулированных в ЕКСД, разделы «Квалификационные характеристики должностей работников в сфере образования»):

– Разработка и обновление содержания учебных курсов, дисциплин (модулей) программ всех уровней математического образования с учетом: порядка, установленного законодательством Российской Федерации об образовании; требований соответствующих ФГОС и(или) образовательных стандартов и современных достижений в области математики.

– Осуществление профессиональной ориентации школьников в области математического образования, пропаганды научно-технических знаний.

1.4. Планируемые результаты обучения

Слушатель программы повышения квалификации сможет:

PO1. Использовать систему компьютерной алгебры GAP для решения стандартных задач университетских курсов «Алгебра» и «Аналитическая геометрия».

PO2. Находить основные представления группы – подстановочное, матричное, генетическим кодом – с помощью системы компьютерной алгебры и электронных атласов.

PO3. Находить в группе систему порождающих её элементов с заданными свойствами.

PO4. На основе построения орбит вершин многогранника при действии группы его симметрий создавать алгебраическую и «живую» модель многогранника.

PO5. Получать новые паркетогранники и их модели.

PO6. Достроить доказательство теоремы о классификации паркетных многоугольников.

PO7. Приобрести опыт оформления результата, использующего системы компьютерной алгебры и графики.

1.5. Категория слушателей: научно-педагогические работники, реализующие образовательные программы в области математического образования; аспиранты, студенты, учителя математики.

1.6. Требования к уровню подготовки поступающего на обучение

Слушатели должны иметь образование, связанное с изучением и преподаванием математики на разных ступенях обучения (в вузе и старших классах общеобразовательных учреждений).

Необходимо владение базовыми интернет-технологиями (веб-поиск, файловые сервисы и пр.), навыки работы в программах для организации видеоконференций.

1.7. Продолжительность обучения: 72 академических часа.

1.8. Форма обучения: очно-заочная (с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий).

1.9. Требования к материально-техническому обеспечению, необходимому для реализации дополнительной профессиональной программы повышения квалификации (требования к аудитории, компьютерному классу, программному обеспечению)

Перечень необходимого программного обеспечения: программа просмотра pdf-файлов Adobe Reader, браузер Google Chrome, программное обеспечение видеоконференции, системы компьютерной алгебры Maple и GAP.

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по программе повышения квалификации в очной форме: компьютер / ноутбук с предустановленным ПО, позволяющем осуществлять проведение видеоконференций; доступ к сетевому ПК каждого слушателя на большинстве очных занятий.

1.10. Документ об образовании: удостоверение о повышении квалификации установленного образца.

II. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

2.1. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование и содержание разделов и тем программы	Всего часов	В том числе:		Использование средств ЭО и ДОТ	Результаты обучения
			Контактная работа	Самостоятельная работа		
1.	О системах компьютерной алгебры; появление и развитие системы GAP, её место среди других систем компьютерной алгебры	10	5	5	Система электронного обучения СФУ, видеоконференция в Zoom	
1.1.	История системы компьютерной алгебры GAP и её краткая характеристика	2	1	1		PO1, PO2
1.2.	Обзор возможностей системы. О работе с руководством для пользователя, установке системы GAP в различных операционных системах и её запуске	2	1	1	GAP	PO1, PO2

№ п/п	Наименование и содержание разделов и тем программы	Всего часов	В том числе:		Использование средств ЭО и ДОТ	Результаты обучения
			Контактная работа	Самостоятельная работа		
1.3	Первые шаги пользователя системы GAP	6	3	3	GAP	PO1
2.	Задание группы порождающими её подстановками, матрицами и генетическим кодом	14	6	8	Система электронного обучения СФУ, видеоконференция в Zoom	
2.1	Построение изоморфизма для различных представлений группы с помощью системы GAP	6	2	4	GAP	
2.2	Представления конечных групп движений евклидова пространства	6	2	4	GAP	
2.3	Бесконечные группы в системе компьютерной алгебры	2	2		GAP	
3.	Электронные Атласы групп	10	6	4	Система электронного обучения СФУ, видеоконференция в Zoom	
3.1	Классические неэлектронные атласы групп	2	2			PO1, PO2
3.2	Библиотека групп в системе GAP	2	1	1	GAP	PO1, PO2
3.3	Атлас представлений конечных групп	4	1		GAP	PO2, PO3
3.4	Атлас спорадических конечных групп, порождённых тремя инволюциями, две из которых перестановочны	2	2	3		PO2, PO7
4.	Поиск в группе систем порождающих её элементов с заданными свойствами	14	6	8	Система электронного обучения СФУ, видеоконференция в Zoom	
4.1	Прямой перебор с точностью до сопряжённости множества всех пар инволюций	4	1	3	GAP	PO2, PO3
4.2	Применение описания максимальных подгрупп	4	2	2	GAP	PO2, PO3
4.3	Особенности поиска систем порождающих в некоторых "больших" группах	6	4	2	GAP	PO2, PO3
5.	Интегрированная среда систем компьютерной алгебры GAP и Maple	12	6	6	Система электронного обучения СФУ, видеоконференция в Zoom	
1.1.	Действие группы на множестве. Орбита группы	2	1	1		PO4

№ п/п	Наименование и содержание разделов и тем программы	Всего часов	В том числе:		Использование средств ЭО и ДОТ	Результаты обучения
			Контактная работа	Самостоятельная работа		
1.2.	Алгебраические расширения поля рациональных чисел и их применение в теории паркетогранников	4	1	3	GAP и Maple	PO1, PO4
1.3	Построение орбит фундаментальных вершин, рёбер и граней многогранника в интегрированной программной среде GAP и Maple	6	4	2	GAP и Maple	PO3-PO5
6.	Применение системы GAP в классификации многогранников с условиями симметричности	10	6	4	Система электронного обучения СФУ, видеоконференция в Zoom	
6.1	Электронные атласы многогранников и групп их симметрий	2	1	1		PO3-PO5
6.2	Классификация паркетных многоугольников	8	5	3	GAP	PO6, PO7
	Итоговый контроль	2	1	1	Система электронного обучения СФУ, видеоконференция в Zoom	PO1–PO7
	ИТОГО	72	36	36		

2.2. План учебной деятельности

Результаты обучения	Учебные действия/ формы текущего контроля	Используемые ресурсы/ инструменты/технологии
PO1. Использовать систему компьютерной алгебры GAP для решения стандартных задач университетских курсов «Алгебра» и «Аналитическая геометрия».	Изучение необходимых теоретических методов и практических навыков, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. Раздел 1.	Система компьютерной алгебры GAP. Видеоконференции в Zoom, Skype. Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «e-Курсы»
PO2. Находить основные представления группы – подстановочное, матричное, генетическим кодом – с помощью системы компьютерной алгебры и электронных атласов.	Изучение необходимых теоретических методов и практических навыков, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. Разделы 2 и 3.	Система компьютерной алгебры GAP. Видеоконференции в Zoom, Skype. Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «e-Курсы».
PO3. Находить в группе систему порождающих её элементов с заданными свойствами.	Изучение необходимых теоретических методов и практических навыков, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. Раздел 4.	Система компьютерной алгебры GAP. Видеоконференции в Zoom, Skype. Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «e-Курсы».

Результаты обучения	Учебные действия/ формы текущего контроля	Используемые ресурсы/ инструменты/технологии
РО4. На основе построения орбит вершин многогранника при действии группы его симметрий создавать алгебраическую и «живую» модель многогранника.	Изучение необходимых теоретических методов и практических навыков, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. Разделы 5 и 6.	Система компьютерной алгебры GAP. Видеоконференции в Zoom, Skype. Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы».
РО5. Получать новые паркетогранники и их модели.	Изучение необходимых теоретических методов и практических навыков, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. Разделы 5 и 6.	Система компьютерной алгебры GAP. Видеоконференции в Zoom, Skype. Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы».
РО6. Достроить доказательство теоремы о классификации паркетных многоугольников.	Изучение необходимых теоретических методов и практических навыков, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. Раздел 6.	Система компьютерной алгебры GAP. Видеоконференции в Zoom, Skype. Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы».
РО7. Приобрести опыт оформления результата, использующего системы компьютерной алгебры и графики.	Изучение необходимых теоретических методов и практических навыков, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. Раздел 6.	Система компьютерной алгебры GAP. Видеоконференции в Zoom, Skype. Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы».

2.3. Виды и содержание самостоятельной работы

Самостоятельная работа слушателей программы ориентирована на практическое применение изученных теоретических понятий и заключается в решении задач, формулировка которых, а также методические указания к их решению приводятся в электронном курсе в системе электронного обучения СФУ <https://e.sfu-kras.ru/>.

Результативность самостоятельной работы слушателей программы определяется умением решать предложенные в курсе (см. п. 4.1. настоящей программы) и аналогичные задачи по разделам курса, и проверяется посредством инструмента «Задание».

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

3.1. Учебно-методическое обеспечение, в т.ч. электронные ресурсы в корпоративной сети СФУ и сети Интернет

I. О системах компьютерной алгебры; появление и развитие системы GAP, её место среди других систем компьютерной алгебры

1 GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.gap-system.org/>

2 Коновалов А.Б. Система компьютерной алгебры GAP 4.7 (Brief GAP Guidebook in Russian) Редакция 3.1.2 6 марта 2014 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://alex-konovarov.github.io/ukrgap/gapbook/manual.pdf>

II. Задание группы порождающими её подстановками, матрицами и генетическим кодом

1 Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп, М., Наука, 1972, 1977, 1982, 1996 (любое издание).

2 Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп: Пер. с англ./Под ред. Ю.И. Мерзлякова, М. Наука, 1980 – 240 с.

III. Электронные Атласы групп

1 Robert Wilson, Peter Walsh, Jonathan Tripp, Ibrahim Suleiman, Stephen Rogers, Richard Parker, Simon Norton, Simon Nickerson, Steve Linton, John Bray and Rachel Abbott, ATLAS of Finite Group Representations [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/>

2 Макосий А.И., Тимофеенко А.В. Атлас конечных простых $(2 \times 2, 2)$ -порождённых групп.

IV. Поиск в группе систем порождающих её элементов с заданными свойствами

1 GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.gap-system.org/>

2 Коновалов А.Б. Система компьютерной алгебры GAP 4.7 (Brief GAP Guidebook in Russian) Редакция 3.1.2 6 марта 2014 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://alex-konovalov.github.io/ukrgap/gapbook/manual.pdf>

3 Мазуров В.Д. О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Сибирский математический журнал, 44, №1(2003), 193-198.

V. Интегрированная среда систем компьютерной алгебры GAP и Maple

1 Тимофеенко А.В. Инволюции конечных групп и выпуклые правильные многогранники Автореферат дисс. ... доктора физ.-мат. наук, Екатеринбург, 2009.

2 Карпова Е. С., Тимофеенко А. В. О разбиениях усечённого икосаэдра на паркетогранники, Чебышевский сборник, 19, №2 (2018), 447-476. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/501/440>

VI. Применение системы GAP в классификации многогранников с условиями симметричности

1 Тимофеенко А.В. К перечню выпуклых правильных многогранников // Современные проблемы математики и механики. VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова / Под ред. И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова. 2011. - М.: Изд-во МГУ. С. 155-170.

2 Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra/>

3 Маслова Н.В., Белоусов И.Н., Минигулов Н.А. Открытые проблемы, сформулированные на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, №3. С. 275-285.

4 Простые конечные спорадические группы, порожденные тремя инволюциями [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://icm.krasn.ru/refextra.php?id=2860>

5 Табинова О. А., Тимофеенко А. В. О классификации паркетных многоугольников // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, 2013, № 1 (23) 216—219.

3.2. Программное обеспечение (информационные обучающие системы, системы вебинаров, сетевые ресурсы хостинга видео, изображений, файлов, презентаций и др.)

1. В системе электронного обучения СФУ <https://e.sfu-kras.ru/> размещены все ресурсы, необходимые для обучения и выполнения практических заданий:

– материалы лекций по программе;

– методические рекомендации по решению задач;

– дополнительные ссылки и материалы в формате PDF по темам курса для самостоятельного изучения.

2. Электронно-библиотечная система СФУ [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://e.sfu-kras.ru/>

3. Общероссийский математический портал (информационная система) [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.mathnet.ru/>.

4. Раздел «Математические этюды» (<https://etudes.ru/etudes/>) представляет собой созданное средствами компьютерной графики оригинальное изложение интересных математических результатов, как классических так и современных. Некоторые этюды позволяют лучше прочувствовать изучаемый материал о многогранниках и группах их симметрий.

IV. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

4.1. Формы аттестации, оценочные материалы, методические материалы

Программа повышения квалификации предусматривает проведение текущей и итоговой аттестации. Текущая аттестация слушателей проводится на основе оценки активности выполнения заданий в электронном обучающем курсе.

Примеры задач для текущей аттестации по разделам дисциплины

I. *О системах компьютерной алгебры; появление и развитие системы GAP, её место среди других систем компьютерной алгебры*

1. Для каждой тригонометрической функции \sin , \cos , tg , ctg , аргументы которой являются рациональным числом градусов, написать программу-функцию в системе GAP, вычисляющую значение функции без округлений в виде суммы комплексных чисел.

2. Средствами системы GAP решить задачи №№74-77, 171-173, 274-278, 561-563, 689-694, 792-794, 840-843, 1310-1311, 1357-1360, 1453, 1454, 1654, 1655 задачника И. В. Проскурякова.

II. *Задание группы порождающими её подстановками, матрицами и генетическим кодом*

3. Инструментами системы GAP получить точные (минимальные) подстановочные и генетическим кодом представления групп симметрий тетраэдра, куба, икосаэдра, заданных порождающими их матрицами.

III. *Электронные Атласы групп*

4. Доказать, что спорадические группы J_1 и J_2 обладают генетическими кодами:

$$J_1 = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^2, (ac)^3, (bc)^7, (abc)^{19}, (bcbca)^{15} \rangle,$$

$$J_2 = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^2, (ac)^3, (bc)^{15}, (abcabc)^7, (abcabc)^5 \rangle$$

и

$$A_5 \cong \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ac)^2, (bc)^3, (ab)^5, (abc)^3 \rangle,$$

$$C_2 \times A_5 \cong \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ac)^2, (bc)^3, (ab)^5 \rangle,$$

IV. *Поиск в группе систем порождающих её элементов с заданными свойствами*

5. В знакопеременной группе A_i , $i=6,7,8$, точно до сопряжённости найти все порождающие её тройки инволюций.

6. Найти в электронном атласе группы, изоморфные группам симметрий правильных многогранников размерности 4.

V. *Интегрированная среда систем компьютерной алгебры GAP и Maple*

7. По фундаментальным вершинам составленного из не более 18 правильных пирамид с единичными рёбрами выпуклого многогранника с рёбрами длины 1 или 2 построить его алгебраическую и «живую» модели в интегрированной программной среде GAP и Maple.

8. Построить новые выпуклые соединения более 18 правильных пирамид.

9. Составить таблицу сложения двугранных углов таких, как у правильных пирамид и их выпуклых соединений. Найти символьные и округлённые значения слагаемых

и сумм с помощью формулы $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$, где a, b, c – плоские углы трёхгранного угла и C – двугранный угол, противолежащий плоскому углу c .

VI. *Применение системы GAP в классификации многогранников с условиями симметричности*

10. Найти новые разбиения икосаэдра на паркетограммики.

11. Завершить доказательство теоремы о классификации паркетных многоугольников.

12. Построить GAP-модели многогранников Залгаллера $M_{21}, M_{22}, \dots, M_{25}$ на основе координат их фундаментальных вершин в алгебраическом расширении поля рациональных чисел с многочленами расширения, представленными М. Костэрс на семинаре «Группы и паркетограммики» (<https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2021>) 14 и 28 апреля, 18 июня 2021 г.

13. Найти матрицу перехода от системы координат, начало которой лежит в центре тяжести многогранника, а координатные оси согласованы с осями и/или плоскостями симметрии многогранника, к системе координат, плоскость xOy которой лежит в плоскости сверхфундаментальной грани, ось абсцисс содержит вершину этой грани с наименьшим номером, а начало координат лежит в центре тяжести грани. Рассмотреть правильногранные пирамиды и их выпуклые соединения.

Методические материалы, необходимые для выполнения текущих заданий, представлены в соответствующих элементах электронного обучающего курса и включают описание задания, методические рекомендации по его выполнению, критерии оценивания.

Аттестация проводится в виде зачета по разделам программы и выполнения итогового задания в форме теста в электронном обучающем курсе.

4.2. Требования и содержание итоговой аттестации

Основанием для аттестации слушателей заданной программы является выполнение текущих заданий, предложенных преподавателем или положительная оценка письменной работы после её обсуждения с преподавателем.

Программу составили:

Доктор физ.-матем. наук



А.В. Тимофеев

Руководитель программы:

Доктор физ.-матем. наук



А.В. Тимофеев