

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО «СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**



УТВЕРЖДАЮ:

Директор

НОЦ «Институт непрерывного
образования»

Е.В. Мошкина
2021 г.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПРОГРАММА
ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ**

«Избранные главы алгебры и теории чисел»

Красноярск 2021

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

1.1. Аннотация программы

Знание основ алгебры и теории чисел полезно и зачастую даже необходимо в работе будущего специалиста в области математики и ее преподавания. Алгебраические и теоретико-числовые методы, наряду с классическими методами математического анализа, применяются в различных разделах современной математики. Хорошо известны приложения теории чисел (в том числе и элементарной) к криптографии и теории кодирования.

Программа повышения квалификации нацелена на углубление знаний слушателей о современных методах решения задач алгебры и теории чисел, в том числе нестандартных (олимпиадных) задач школьного уровня из элементарной математики.

1.2. Цель программы

Цель программы повышения квалификации – совершенствование профессиональных компетенций преподавателей вуза, учителей математики и аспирантов в использовании современных алгебраических и теоретико-числовых методов для работы с обучающимися в основном и дополнительном математическом образовании на разных ступенях обучения.

1.3. Компетенции (трудовые функции) в соответствии с профессиональным стандартом (формирование новых или совершенствование имеющихся)

В условиях отсутствия действующих профессиональных стандартов в профессиональном образовании предполагается реализовать в данной программе подготовку к выполнению трудовых функций, представленных ниже (с учетом требований, сформулированных в ЕКСД, разделы [«Квалификационные характеристики должностей работников в сфере образования»](#)):

- Разработка и обновление содержания учебных курсов, дисциплин (модулей) программ всех уровней математического образования с учетом: порядка, установленного законодательством Российской Федерации об образовании; требований соответствующих ФГОС и(или) образовательных стандартов и современных достижений в области математики.
- Осуществление профессиональной ориентации школьников в области математического образования, пропаганды научно-технических знаний.

1.4. Планируемые результаты обучения

Слушатель программы повышения квалификации сможет:

РО1. Использовать методы алгебры и теории чисел для решения олимпиадных теоретико-числовых задач.

РО2. Приводить примеры применения методов элементарной теории чисел в современной криптографии.

РО3. Разрабатывать алгоритмы для систем компьютерной алгебры (для решения специальных классов диофантовых уравнений).

РО4. Вычислять в замкнутом виде конечные тригонометрические суммы.

РО5. Получать новые законы взаимности для тригонометрических сумм.

РО6. Применять методы элементарной теории уравнений Пелля к вычислительным задачам алгебраической геометрии.

РО7. Использовать методы теории многочленов над конечными полями для построения алгоритмов в компьютерной алгебре.

1.5. Категория слушателей: научно-педагогические работники, реализующие образовательные программы в области математического образования; аспиранты, учителя математики.

1.6. Требования к уровню подготовки поступающего на обучение

Слушатели должны иметь высшее образование, связанное с изучением и преподаванием математики на разных ступенях обучения (в вузе и старших классах общеобразовательных учреждений).

Необходимо владение базовыми интернет-технологиями (веб-поиск, файловые сервисы и пр.), начальный опыт работы с системами компьютерной алгебры, навыки работы в программе для организации видеоконференций Zoom.

1.7. Продолжительность обучения: 72 академических часа.

1.8. Форма обучения: очно-заочная (с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий).

1.9. Требования к материально-техническому обеспечению, необходимому для реализации дополнительной профессиональной программы повышения квалификации (требования к аудитории, компьютерному классу, программному обеспечению)

Перечень необходимого программного обеспечения: средства просмотра презентаций Power Point; программа просмотра pdf-файлов Adobe Reader, браузер Google Chrome, программное обеспечение Zoom, on-line система компьютерной алгебры Wolfram Alpha.

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по программе повышения квалификации в очной форме: компьютер / ноутбук с предустановленным ПО, позволяющем осуществлять проведение видеоконференций в Zoom.

1.10. Документ об образовании: удостоверение о повышении квалификации установленного образца.

II. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

2.1. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование и содержание разделов и тем программы	Всего часов	В том числе:		Использование средств ЭО и ДОТ	Результаты обучения
			Контактная работа	Самостоятельная работа		
1.	Элементарная теория чисел	16	8	8	Система электронного обучения СФУ https://e.sfu-kras.ru/ , видеоконференция в Zoom	PO1, PO2
1.1.	Теория делимости целых чисел	4	2	2		
1.2.	Распределение простых чисел	4	2	2		
1.3.	Теория сравнений и кольца классов вычетов	4	2	2		
1.4.	Генерация больших простых чисел	4	2	2		

№ п/п	Наименование и содержание разделов и тем программы	Всего часов	В том числе:		Использование средств ЭО и ДОТ	Результаты обучения
			Контактная работа	Самостоятельная работа		
2.	Метод Рунге в теории диофантовых уравнений	14	7	7	Система электронного обучения СФУ https://e.sfu-kras.ru/ , видеоконференция в Zoom	PO1, PO3
2.1.	Теорема Рунге о конечности множества решений диофантовых уравнений с двумя неизвестными	4	2	2		
2.2.	Метод Рунге в стандартной версии	4	2	2		
2.3.	Элементарная версия метода Рунге для уравнений 3-й и 4-й степени	4	2	2		
2.4.	Компьютерно- алгебраические аспекты реализации метода Рунге	2	1	1		
3.	Диофантовы уравнения вида $x^2 - Ay^2 = B$	12	6	6	Система электронного обучения СФУ https://e.sfu-kras.ru/ , видеоконференция в Zoom	PO1, PO6
3.1.	Основные факты элементарной теории обобщенных уравнений Пелля	2	1	1		
3.2.	Показательные диофантовы уравнения	2	1	1		
3.3.	Целые значения рациональных дробей	2	1	1		
3.4.	Неравенства в целых числах	2	1	1		
3.5.	Задачи про точные квадраты	2	2	2		
4.	Конечные тригонометрические суммы	16	8	8	Система электронного обучения СФУ https://e.sfu-kras.ru/ , видеоконференция в Zoom	PO4, PO5
4.1.	Метод вычисления стандартных тригонометрических сумм	4	2	2		
4.2.	Суммирование по приведенной системе вычетов	4	2	2		
4.3.	Суммы с наибольшими общими делителями	4	2	2		
4.4.	Суммы Гаусса и их аналоги	4	2	2		

№ п/п	Наименование и содержание разделов и тем программы	Всего часов	В том числе:		Использование средств ЭО и ДОТ	Результаты обучения
			Контактная работа	Самостоятельная работа		
5.	Многочлены над конечными полями	12	6	6	Система электронного обучения СФУ https://e.sfu-kras.ru/ , видеоконференция в Zoom	PO2, PO7
5.1.	Конечные поля	4	2	2		
5.2.	Факторизация многочленов над конечными полями	4	2	2		
5.3.	Число точек эллиптической кривой над конечным полем. Вычисление классических сумм Якобсталя	4	2	2		
	Итоговый контроль	2	1	1	Система электронного обучения СФУ https://e.sfu-kras.ru/ , видеоконференция в Zoom	PO1–PO7
	ИТОГО	72	36	36		

2.2. План учебной деятельности

Результаты обучения	Учебные действия/ формы текущего контроля	Используемые ресурсы/ инструменты/технологии
PO 1. Использовать методы алгебры и теории чисел для решения олимпиадных теоретико-числовых задач	Изучение необходимых теоретических методов и возможностей их применения, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. в разделах 1 и 5	Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы» (элементы «Файл», «Задание», тест Moodle для итогового контроля). Видеоконференции в Zoom
PO2. Приводить примеры применения методов элементарной теории чисел в современной криптографии	Изучение необходимых теоретических методов и возможностей их применения, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. в разделах 1, 2 и 3	Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы» (элементы «файл», «Задание», тест Moodle для итогового контроля)
PO3. Разрабатывать алгоритмы для систем компьютерной алгебры (для решения специальных классов диофантовых уравнений)	Изучение необходимых теоретических методов и возможностей их применения, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. в разделе 2	Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы» (элементы «Файл», «Задание»). Система компьютерной алгебры
PO4. Вычислять в замкнутом виде конечные тригонометрические суммы	Изучение необходимых теоретических методов и возможностей их применения, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. в разделе 4	Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы» (элементы «файл», «Задание», тест Moodle для итогового контроля)

Результаты обучения	Учебные действия/ формы текущего контроля	Используемые ресурсы/ инструменты/технологии
РО5. Получать новые законы взаимности для тригонометрических сумм	Изучение необходимых теоретических методов и возможностей их применения, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. в разделе 4	Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы» (элементы «Файл», «Задание»). Видеоконференции в Zoom
РО6. Применять методы элементарной теории уравнений Пелля к вычислительным задачам алгебраической геометрии	Изучение необходимых теоретических методов и возможностей их применения, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. в разделе 3	Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы» (элементы «Файл», «Задание»)
РО7. Использовать методы теории многочленов над конечными полями для построения алгоритмов в компьютерной алгебре	Изучение необходимых теоретических методов и возможностей их применения, разбор решения задач/ решение задач, приведенных в п. 4.1. в разделе 5	Материалы электронного курса в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы» (элементы «Файл», «Задание»). Система компьютерной алгебры

2.3. Виды и содержание самостоятельной работы

Самостоятельная работа слушателей программы ориентирована на практическое применение изученных теоретических понятий и заключается в решении задач, формулировка которых, а также методические указания к их решению приводятся в электронном курсе в системе электронного обучения СФУ <https://e.sfu-kras.ru/>.

Результативность самостоятельной работы слушателей программы определяется умением решать предложенные в курсе (см. п. 4.1. настоящей программы) и аналогичные задачи по разделам курса, и проверяется посредством инструмента «Задание».

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

3.1. Учебно-методическое обеспечение, в т.ч. электронные ресурсы в корпоративной сети СФУ и сети Интернет

I. Элементарная теория чисел

- Осипов Н.Н., Медведева М. И. Теория чисел: учеб. пособие. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2016.
- Осипов Н.Н., Медведева М.И. Теория чисел. Задачи для самостоятельной работы: учебно-метод. пособие. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2021.

II. Метод Рунге в теории диофантовых уравнений

- Осипов Н.Н. Метод Рунге для уравнений 4-й степени: элементарный подход // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. – М.: МЦНМО, 2015. – С. 178–198.
- Osipov N.N., Gulnova B.V. An algorithmic implementation of Runge's method for cubic diophantine equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2018. – Т. 11. – № 2. – С. 137–147.
- Osipov N.N., Medvedeva M.I. An elementary algorithm for solving a diophantine equation of degree four with Runge's condition // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2019. – Т. 12. – № 3. – С. 331–341.
- Osipov N.N., Dalinkevich S.D. An algorithm for solving a quartic diophantine equation satisfying Runge's condition // In: Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2019. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11661. Springer, 2019. P. 377–392.

- Осипов Н.Н., Кытманов А.А. Алгоритм для решения семейства диофантовых уравнений четвертой степени, удовлетворяющих условию Рунге // Программирование. – 2021. – № 1. – С. 39–44.

III. Диофантовы уравнения вида $x^2 - Ay^2 = B$

- Осипов Н.Н. Уравнения Пелля в задачах. – Красноярск, 2021.
- Кытманов А.А., Осипов Н.Н., Тихомиров С.А. Нахождение компонент Эйна в пространствах модулей стабильных 2-расслоений на проективном пространстве // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57. – № 2. – С. 410–419.
- Осипов Н.Н., Тихомиров С.А. О числе неприводимых компонент Ведерникова — Эйна пространства модулей стабильных 2-расслоений на проективном пространстве // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59. – № 1. – С. 136–142.

IV. Конечные тригонометрические суммы

- Осипов Н.Н. О вычислении конечных тригонометрических сумм // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23. – М.: МЦНМО, 2019. – С. 174–208.

V. Многочлены над конечными полями

- Осипов Н.Н., Медведева М.И. Многочлены над конечными полями: учеб. пособие. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2016.
- Осипов Н.Н. О вычислении классических сумм Якобсталя // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 24. – М.: МЦНМО, 2019. – С. 121–144.

3.2. Программное обеспечение (информационные обучающие системы, системы вебинаров, сетевые ресурсы хостинга видео, изображений, файлов, презентаций и др.)

- В системе электронного обучения СФУ <https://e.sfu-kras.ru/> размещены все ресурсы, необходимые для обучения и выполнения практических заданий:
 - материалы лекций по программе;
 - методические рекомендации по решению задач;
 - дополнительные ссылки и материалы в формате PDF по темам курса для самостоятельного изучения.
- Электронно-библиотечная система СФУ [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://e.sfu-kras.ru/>.
- Общероссийский математический портал (информационная система) [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.mathnet.ru/>.
- Журнал «Математическое образование» (<https://matob.ru/index.html>) – ежеквартальное издание по широкому кругу вопросов математического образования, включая также историю математики. Издатель и учредитель издания – Фонд математического образования и просвещения. Выпуск современной серии журнала начался в 1997 г., до этого журнал выходил в 1912–1918 гг. и в 1928–1930 гг.
- Сборник «Математическое просвещение» (<https://www.mccme.ru/free-books/matpros.html>). Представляет собой связующее звено между специальной и популярной математической литературой. В сборники включаются научно-популярные статьи о новых результатах и новых направлениях развития чистой и прикладной математики, в том числе переводы статей из научно-популярных зарубежных математических изданий. Помимо статей собственно математического содержания, в сборниках публикуются материалы, отражающие состояние преподавания математики в России (прежде всего в специализированных школах и в профильных вузах), а также статьи исторического характера. Электронные версии сборника (все серии) доступны на официальном сайте.

IV. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

4.1. Формы аттестации, оценочные материалы, методические материалы

Программа повышения квалификации предусматривает проведение текущей и итоговой аттестации. Текущая аттестация слушателей проводится на основе оценки активности выполнения заданий в электронном обучающем курсе.

Примеры задач для текущей аттестации по разделам дисциплины

I. Элементарная теория чисел

1. Пусть m и n — натуральные числа, большие единицы и такие, что $n^3 - 1$ делится на m , а $m - 1$ делится на n . Докажите, что $m = n^{3/2} + 1$ или $m = n^2 + n + 1$.

2. Найдите все пары (x, y) натуральных чисел, для которых число

$$\frac{x^3 + y^2}{x^2y + 1}$$

является целым.

II. Метод Рунге в теории диофантовых уравнений

3. Натуральные числа x , y и a таковы, что

$$x(y^2 - 2x^2) + y^2 + y + a = 0.$$

Докажите, что $x \leq (2a - 1 + \sqrt{2a^2 - 4a + 1})/2$.

4. Решите уравнение

$$xy^3 + y^2 + y - x^5 + 10 = 0$$

в натуральных числах.

III. Диофантовы уравнения вида $x^2 - Ay^2 = B$

5. Докажите, что для любого натурального d уравнение

$$x^2 - (d^2 + 1)y^2 = -d^2 - 2222$$

неразрешимо в целых числах x и y .

6. Пусть $d > 1$ — целое число. Докажите, что уравнение

$$x^2 - (d^2 + d)y^2 = -d^2 + 1$$

разрешимо в целых числах x и y тогда и только тогда, когда $d = t^2 - 1$, где $t > 1$ — целое число.

IV. Конечные тригонометрические суммы

7. Для нечетного натурального n вычислите сумму

$$\sum_{k=1}^n \frac{\gcd(k, n)}{\cos^2(\pi k/n)},$$

где $\gcd(k, n)$ — наибольший общий делитель k и n .

8. Пусть m и n — натуральные взаимно простые числа. Положим

$$S(m, n) = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi mk}{n}.$$

Докажите, что число $3S(m, n)/2$ является целым.

V. Многочлены над конечными полями

9. Существует ли многочлен, имеющий ровно сто различных корней и делящийся на свою производную?

10. Пусть p — простое число. Вычислите $[\beta^{p+2}] \bmod p$, где

$$\beta = \frac{1}{2 \cos(4\pi/7)}$$

($[x]$ — целая часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x).

Методические материалы, необходимые для выполнения текущих заданий, представлены в соответствующих элементах электронного обучающего курса и включают описание задания, методические рекомендации по его выполнению, критерии оценивания.

Аттестация проводится в виде зачета по разделам программы и выполнения итогового задания в форме теста в электронном обучающем курсе.

4.2. Требования и содержание итоговой аттестации

Основанием для аттестации слушателя по данной программе является:

- не менее, чем 50 % зачтенных текущих заданий, размещенных в электронном образовательном курсе;
- выполнение итоговой аттестационной работы (90 % верных ответов по итогам тестирования).

Программу составили:

Доктор физ.-матем. наук, доцент



Осипов Н.Н.

Канд. физ.-матем. наук, доцент



Знаменская О.В.

Руководитель программы:

Доктор физ.-матем. наук, доцент



Осипов Н.Н.