

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО «СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



УТВЕРЖДАЮ

Директор НОЦ «Институт
непрерывного образования»

Е.В. Мошкина
Е.В. Мошкина

« *Мошкина* » 2026 г.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПРОГРАММА
ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

«Избранные методы решения геометрических задач повышенной сложности на ЕГЭ по математике профильного уровня»

Красноярск 2026

УЧЕБНЫЙ ПЛАН
дополнительной профессиональной программы повышения квалификации
«Избранные методы решения геометрических задач повышенной сложности
на ЕГЭ по математике профильного уровня»

Форма обучения: очно-заочная с ДОТ.

Срок обучения: 72 часа.

№ п/п	Наименование модулей (курсов)	Общая трудоемкость, ч	Всего контактн., ч	Контактные часы		СРС, ч	Формы контроля
				Лекции	Практ. и семинарские занятия		
1.	Решение задачи 14: аналитические методы нахождения углов в пространстве	12	7	3	4	5	Промежуточная аттестация
2.	Решение задачи 14: аналитические методы нахождения расстояний в пространстве	12	7	3	4	5	Промежуточная аттестация
3.	Решение задачи 17: касательная к окружности	12	7	3	4	5	Промежуточная аттестация
4.	Решение задачи 17: окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником	12	7	3	4	5	Промежуточная аттестация
5.	Решение задачи 14: разбор стереометрических задач ЕГЭ прошлых лет	10	7	3	4	3	Промежуточная аттестация
6.	Решение задачи 17: разбор планиметрических задач ЕГЭ прошлых лет	10	7	3	4	3	Промежуточная аттестация
	Итоговая аттестация	4			4		Зачет
	ИТОГО	72	46	18	28	26	

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН
дополнительной профессиональной программы повышения квалификации
«Избранные методы решения геометрических задач повышенной сложности
на ЕГЭ по математике профильного уровня»

Категория слушателей: учителя, работающие в профильных классах общеобразовательных учреждений с углублённым изучением математики.

Срок обучения: 72 часа.

Форма обучения: очно-заочная с ДОТ.

Режим занятий: 7 часов в день.

№ п/п	Наименование модулей (курсов)	Общая трудоемкость, ч	Всего контактных, ч	из них с ЭОиДОТ, ч	Контактные часы		СРС, ч	Результаты обучения
					Лекции	Практ. и семинарские занятия		
1.	Решение задачи 14: аналитические методы нахождения углов в пространстве	12	7	0	3	4	5	PO1–PO4
2.	Решение задачи 14: аналитические методы нахождения расстояний в пространстве	12	7	0	3	4	5	PO1–PO4
3.	Решение задачи 17: касательная к окружности	12	7	0	3	4	5	PO1–PO4
4.	Решение задачи 17: окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником	12	7	0	3	4	5	PO1–PO4
5.	Решение задачи 14: разбор стереометрических задач ЕГЭ прошлых лет	10	7	7	3	4	3	PO1–PO4
6.	Решение задачи 17: разбор планиметрических задач ЕГЭ прошлых лет	10	7	7	3	4	3	PO1–PO4
	Итоговая аттестация	4				4		PO1–PO4
	ИТОГО	72	46	14	18	28	26	

**Календарный учебный график
дополнительной профессиональной программы повышения квалификации
«Избранные методы решения геометрических задач повышенной сложности
на ЕГЭ по математике профильного уровня»**

№ п/п	Наименование модулей (курсов)	Неделя	Общая трудоем- кость, ч	Виды занятий (количество часов)			
				Лекция	Практ. и семинарские занятия	СРС	Итоговый контроль
1.	Решение задачи 14: аналитические методы нахождения углов в пространстве	1	12	3	4	5	Промежуто- чная аттестация
2.	Решение задачи 14: аналитические методы нахождения расстояний в пространстве	1	12	3	4	5	Промежуто- чная аттестация
3.	Решение задачи 17: касательная к окружности	1	12	3	4	5	Промежуто- чная аттестация
4.	Решение задачи 17: окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником	1	12	3	4	5	Промежуто- чная аттестация
5.	Решение задачи 14: разбор стереометрических задач ЕГЭ прошлых лет	2	10	3	4	3	Промежуто- чная аттестация
6.	Решение задачи 17: разбор планиметрических задач ЕГЭ прошлых лет	3	10	3	4	3	Промежуто- чная аттестация
	Итоговая аттестация	4	4		4		Зачет
	ИТОГО		72	18	28	26	

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

1.1. Аннотация программы

Геометрия – наиболее уязвимое звено школьной математики. Это связано как с обилием различных типов геометрических задач, так и с многообразием приёмов и методов их решения. Программа повышения квалификации включает разбор стереометрической (№14) и планиметрической (№17) задач. Отдельное внимание уделено методу координат для решения стереометрических задач. Эти задания обеспечивают достаточную полноту проверки овладения материалом курса геометрии 7-11 классов как на повышенном, так и на высоком уровне сложности. От учащихся требуется применить свои знания либо в измененной, либо в новой для них ситуации. При этом они должны проанализировать ситуацию, самостоятельно «сконструировать» математическую модель и способ решения, используя знания из различных разделов школьного курса математики, обосновать и математически грамотно записать полученное решение.

Программа повышения квалификации нацелена не только на повышение методической и предметно-содержательной компетенции учителей, но также на углубление знаний о технологиях, методиках подготовки к экзамену и разбор типичных ошибок, допускаемых учащимися при выполнении заданий №14 и №17 ЕГЭ по профильной математике с развернутым ответом повышенного уровня сложности.

1.2. Цель программы

Цель программы повышения квалификации — совершенствование профессиональных компетенций слушателей программы в области методики преподавания при углублённом изучении геометрии в 10-11 классах и подготовки учащихся к ЕГЭ по профильной математике.

1.3. Компетенции (трудовые функции) в соответствии с Профессиональным стандартом (формирование новых или совершенствование имеющихся)

В соответствии с профессиональным стандартом (утв. приказом Министерства труда и социальной защиты РФ от 18 октября 2013 г. N 544н) 01.001 «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)», выделяются следующие трудовые действия, на формирование и совершенствование которых направлена программа повышения квалификации:

- А/01.6 Общепедагогическая функция. Обучение.
- В/04.6 Модуль «Предметное обучение. Математика».

1.4. Планируемые результаты обучения

Слушатели в результате освоения программы повышения квалификации смогут достичь следующих результатов:

РО1. Выбирать современные методики организации образовательной деятельности, технологии обучения, диагностики и оценивания качества образовательного процесса при углубленном изучении математики в старших классах в рамках подготовки обучающихся к ЕГЭ по профильной математике.

РО2. Интерпретировать типологию заданий №14 и №17 с развернутым ответом, используемых в КИМ ЕГЭ по профильной математике; критерии и виды используемых шкал для оценки заданий с развернутым ответом различного типа.

РО3. Понимать специфику оценивания заданий №14 и №17 с развернутым ответом.

РО4. Выявлять типичные трудности и ошибки при выполнении обучающимися заданий №14 и №17 с развернутым ответом ЕГЭ по профильной математике и понимать возможные пути их устранения.

1.5. Категория слушателей

Учителя, работающие в профильных классах общеобразовательных учреждений с углублённым изучением математики.

1.6. Требования к уровню подготовки поступающего на обучение

Среднее профессиональное или высшее образование, или обучение по программам среднего профессионального или высшего образования.

1.7. Продолжительность обучения: 72 академических часа.

1.8. Форма обучения: очно-заочная с ДОТ.

1.9. Требования к материально-техническому обеспечению, необходимому для реализации дополнительной профессиональной программы повышения квалификации (требования к аудитории, компьютерному классу, программному обеспечению)

Очные занятия проводятся в первую неделю в рабочие дни в учебных аудиториях физико-математической школы-интерната ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: ул. Борисова, д. 5. Аудитории оснащена проектором и доской.

Для организации дистанционной части занятий необходим компьютер или ноутбук, подключенный к сети Internet (не менее 2 Мбит/с), с установленным ПО: Microsoft Office, Foxit Reader, наличие предустановленных браузеров (Chrome, Yandex – последние обновленные версии), приложения для организации видеоконференций SaluteJazz.

1.10. Документ об образовании: удостоверение о повышении квалификации установленного образца.

II. ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

Обучение по программе повышения квалификации реализовано в очно-заочной форме с ДОТ. Лекционный материал представляется в виде комплекса текстовых материалов, презентаций. Изучение теоретического материала (СРС) предполагается до и после лекционной части работы.

Материально-технические условия реализации дисциплины

Очные занятия реализуются в учебных аудиториях: посадочные места по количеству обучающихся, рабочее место преподавателя, учебная доска, переносное мультимедийное оборудование; компьютер с лицензионным программным обеспечением; высокоскоростное подключение к сети Интернет.

Дистанционные занятия реализуются на базе инструментов видеоконференцсвязи и включают в себя практические занятия, сочетающие в себе ответы на вопросы, связанные с материалом лекции, в формате дискуссий, а также групповую и индивидуальную работу. Для проведения синхронных занятий (вебинаров со спикерами) применяется программа видеоконференцсвязи SaluteJazz (<https://salutejazz.ru/>).

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Программа реализуется очно-заочно, с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, и включает занятия лекционного типа, семинарские, активные и ситуативные методы обучения.

Все методические материалы и рекомендации представлены в электронном курсе: <https://online.sfu-kras.ru/course/view.php?id=172>.

Содержание комплекта учебно-методических материалов

Учебно-методический комплекс содержит: систему навигации по программе (учебно-тематический план, интерактивный график работы по программе, сведения о результатах обучения, о преподавателе дисциплины, чат для объявлений и вопросов преподавателю), презентации к лекциям, набор ссылок на внешние образовательные ресурсы и инструменты, систему заданий с подробными инструкциями, списки основной и дополнительной литературы.

Виды и содержание самостоятельной работы

Выполнение самостоятельной работы слушателями предполагается в очном и дистанционном режимах. Самостоятельно слушателями изучаются представленные теоретические материалы в форме интерактивных лекций и в текстовом варианте, просматриваются записи видео лекций занятий, краткие резюмирующие материалы, дополнительные инструкции в различных форматах (скринкасты, интерактивные справочники, текстовые пояснения).

Также слушатели самостоятельно проводят анализ и систематизацию материала в рамках выполнения практических заданий. Для оценки уровня усвоения изученного учебного материала, слушатели проходят контрольные задания при помощи системы электронного обучения (LMS Moodle) и внешних интернет-сервисов.

III. КАДРОВЫЕ УСЛОВИЯ

Руководитель программы:

Зотов Игорь Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, с.н.с. регионального научно-образовательного математического центра «Красноярский математический центр» Сибирского федерального университета.

Преподаватели программы:

Гагарина Светлана Ивановна, учитель математики физико-математической школы-интерната ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»;

Зотов Игорь Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, с.н.с. регионального научно-образовательного математического центра «Красноярский математический центр» Сибирского федерального университета.

Лозовский Данил Сергеевич, учитель математики физико-математической школы-интерната ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

Смолина Юлия Александровна, учитель математики физико-математической школы-интерната ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

Рощина Галина Александровна, учитель математики физико-математической школы-интерната ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

Фельбрина Светлана Валерьевна, учитель математики физико-математической школы-интерната ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

Черепанова Ольга Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, директор Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Чечиков Ян Владимирович, учитель математики физико-математической школы-интерната ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

Шипилова Ольга Геннадьевна, учитель математики физико-математической школы-интерната ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

IV. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

4.1. Учебно-методическое обеспечение, в т.ч. электронные ресурсы в корпоративной сети СФУ и сети Интернет

1. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. – М.: МЦНМО, 2009. – 184 с.
2. Гордин Р.К. ЕГЭ. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень). – М.: МЦНМО, 2025. – 160 с.
3. Гордин Р.К. ЕГЭ. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень). – М.: МЦНМО, 2025. – 304 с.
4. Горяшин Д.В. Дополнительные вступительные испытания по математике в МГУ. – М.: МЦНМО, 2020. – 88 с.
5. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Том 1. Планиметрия, преобразования плоскости. – М.: МЦНМО, 2026. – 312 с.
6. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Том 2. Стереометрия, преобразования пространства. – М.: МЦНМО, 2026. – 256 с.
7. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Том 3. Треугольники и тетраэдры. – М.: МЦНМО, 2026. – 192 с.
8. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2022. – 640 с.
9. Прасолов В.В. Задачи по стереометрии. – М.: МЦНМО, 2023. – 352 с.
10. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. ЕГЭ. Математика. Решение планиметрических задач. – Ростов н/Д: Легион, 2024. – 240 с.
11. Сагателова Л. С. Решение геометрических задач методом координат на плоскости. 9-11 классы. – М.: ИЛЕКСА, 2023. – 128 с.
12. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Аналитическая геометрия для школьников. – М.: МЦНМО, 2022. – 208 с.
13. Сборник методических материалов по математике учителей Президентского ФМЛ № 239. Часть 2. – СПб.: СМИО Пресс, 2022. – 200 с.
14. Сборник методических материалов по математике учителей Президентского ФМЛ № 239. Часть 1. – СПб.: СМИО Пресс, 2021. – 124 с.
15. Смирнова Е.С. Планиметрия: виды задач и методы их решений. Элективный курс для учащихся 9-11 классов. – М.: МЦНМО, 2016. – 416 с.
16. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. – М.: МЦНМО, 2018. – 944 с.
17. Методический журнал для учителей математики «Математика» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://raum.math.ru/node/179>.
18. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://fipi.ru>.

V. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

5.1. Формы аттестации, оценочные материалы, методические материалы

Программа предусматривает проведение текущей и итоговой аттестации. Текущая аттестация слушателей проводится на основе оценки активности и выполнении контрольных заданий.

Итоговой аттестационной работой является письменная контрольная работа по пройденным темам.

5.2. Требования и содержание итоговой аттестации

Основанием для аттестации слушателя по данной программе является:

- выполнение на положительную оценку всех текущих заданий;
- выполнение на положительную оценку итоговой аттестационной контрольной работы.

Критерии оценки освоения обучающимися дополнительной профессиональной программы

По результатам итоговых аттестационных испытаний, выставляются отметки по шкале «зачтено – не зачтено».

«Зачтено» заслуживает обучающийся, показавший освоение планируемых результатов (знаний, умений, компетенций), предусмотренных программой, изучивших литературу, рекомендованную программой, способный к самостоятельному пополнению и обновлению знаний в ходе дальнейшего обучения и профессиональной деятельности.

«Не зачтено» выставляется обучающемуся, не показавшему освоение планируемых результатов (знаний, умений, компетенций), предусмотренных программой, допустившему серьезные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий, не справившемуся с выполнением итоговой аттестационной работы.

Оценка по итоговой аттестации определяется суммированием баллов, полученных при выполнении текущих заданий и письменной контрольной работы. Для получения оценки «зачтено» необходимо набрать 80 % и более от общего количества баллов (40 и более баллов).

Оценка видов работ в баллах по итоговой аттестации

Выполняемая работа	Всего баллов	Количество баллов в разрезе видов деятельности	
		задания	защита
Задание «Решение задачи 14: аналитические методы нахождения углов в пространстве»	5	5	–
Задание «Решение задачи 14: аналитические методы нахождения расстояний в пространстве»	5	5	–
Задание «Решение задачи 17: касательная к окружности»	5	5	–
Задание «Решение задачи 17: окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником»	5	5	–
Задание «Решение задачи 14: разбор стереометрических задач ЕГЭ прошлых лет»	5	5	–
Задание «Решение задачи 17: разбор планиметрических задач ЕГЭ прошлых лет»	5	5	–
Письменная контрольная работа	20	20	–
Итого	50	50	–

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
дополнительной профессиональной программы повышения
квалификации
«Избранные вопросы подготовки учащихся 10-11 классов
к ЕГЭ по математике»

1. Аннотация

Геометрия – наиболее уязвимое звено школьной математики. Это связано как с обилием различных типов геометрических задач, так и с многообразием приёмов и методов их решения. Программа повышения квалификации включает разбор стереометрической (№14) и планиметрической (№17) задач. Отдельное внимание уделено методу координат для решения стереометрических задач. Эти задания обеспечивают достаточную полноту проверки овладения материалом курса геометрии 7-11 классов как на повышенном, так и на высоком уровне сложности. От учащихся требуется применить свои знания либо в измененной, либо в новой для них ситуации. При этом они должны проанализировать ситуацию, самостоятельно «сконструировать» математическую модель и способ решения, используя знания из различных разделов школьного курса математики, обосновать и математически грамотно записать полученное решение.

Программа повышения квалификации нацелена не только на повышение методической и предметно-содержательной компетенции учителей, но также на углубление знаний о технологиях, методиках подготовки к экзамену и разбор типичных ошибок, допускаемых учащимися при выполнении заданий №14 и №17 ЕГЭ по профильной математике с развернутым ответом повышенного уровня сложности.

Результаты обучения:

Слушатели в результате освоения программы повышения квалификации смогут достичь следующих результатов:

РО1. Выбирать современные методики организации образовательной деятельности, технологии обучения, диагностики и оценивания качества образовательного процесса при углубленном изучении математики в старших классах в рамках подготовки обучающихся к ЕГЭ по профильной математике.

РО2. Интерпретировать типологию заданий №14 и №17 с развернутым ответом, используемых в КИМ ЕГЭ по профильной математике; критерии и виды используемых шкал для оценки заданий с развернутым ответом различного типа.

РО3. Понимать специфику оценивания заданий №14 и №17 с развернутым ответом.

РО4. Выявлять типичные трудности и ошибки при выполнении обучающимися заданий №14 и №17 с развернутым ответом ЕГЭ по профильной математике и понимать возможные пути их устранения.

2. Содержание

№, наименование темы	Содержание лекций (кол-во часов)	Наименование практических занятий (кол-во часов)	Виды СРС (кол-во часов)
Тема 1. Решение задачи 14: аналитические методы нахождения углов в пространстве (12 ч.)	Типология задания № 14, критерии и виды используемых шкал для оценки, специфика оценивания. Типичные трудности и ошибки при выполнении задания № 14 (3 ч.)	Решение задач и выявление типичных трудностей и ошибок темы 1 (4 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (5 ч.)
Тема 2. Решение задачи 14: аналитические методы нахождения расстояний в пространстве (12 ч.)	Типология задания № 14, критерии и виды используемых шкал для оценки, специфика оценивания. Типичные трудности и ошибки при выполнении задания № 14 (3 ч.)	Решение задач и выявление типичных трудностей и ошибок темы 2 (4 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (5 ч.)
Тема 3. Решение задачи 17: касательная к окружности (12 ч.)	Типология задания № 17, критерии и виды используемых шкал для оценки, специфика оценивания. Типичные трудности и ошибки при выполнении задания № 17 (3 ч.)	Решение задач и выявление типичных трудностей и ошибок темы 3 (4 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (5 ч.)
Тема 4. Решение задачи 17: окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником (12 ч.)	Типология задания № 17, критерии и виды используемых шкал для оценки, специфика оценивания. Типичные трудности и ошибки при выполнении задания № 17 (3 ч.)	Решение задач и выявление типичных трудностей и ошибок темы 4 (4 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (5 ч.)
Тема 5. Решение задачи 14: разбор стереометрических задач ЕГЭ прошлых лет (10 ч.)	Типология задания № 14, критерии и виды используемых шкал для оценки, специфика оценивания. Типичные трудности и ошибки при выполнении задания № 14 (3 ч.)	Решение задач и выявление типичных трудностей и ошибок темы 5 (4 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (3 ч.)
Тема 6. Решение задачи 17: разбор планиметрических задач ЕГЭ прошлых лет (10 ч.)	Типология задания № 17, критерии и виды используемых шкал для оценки, специфика оценивания. Типичные	Решение задач и выявление типичных трудностей и ошибок темы 6	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий

№, наименование темы	Содержание лекций (кол-во часов)	Наименование практических занятий (кол-во часов)	Виды СРС (кол-во часов)
	трудности и ошибки при выполнении задания № 17 (3 ч.)	(4 ч.)	по теме (3 ч.)
Итоговая аттестация (4 ч.)		Контрольная работа (4 ч.)	

3. Оценка качества освоения дисциплины (формы аттестации, оценочные и методические материалы)

Форма аттестации — зачет. Основанием для допуска к итоговой аттестации является выполнение не менее 80 % промежуточных заданий слушателем по ходу изучения курса.

Формой итоговой аттестации является письменная контрольная работа.

По результатам выполнения текущих заданий и итоговой контрольной работы слушателю выставляется оценка по шкале «зачтено – не зачтено», которая является основанием для аттестации или не аттестации по программе.

Перечень заданий и/или контрольных вопросов

Задания для самостоятельной работы

В самостоятельную работу входит изучение материала курса, просмотр записей видео лекций занятий; закрепление заданий с практических занятий; выполнение тестовых заданий.

Критерии оценивания заданий

Баллы	Критерий
1 балл	Задание практически не выполнено, допущены серьезные и грубые ошибки
2 балла	Задание выполнено частично, и требует серьезной доработки из-за значительного числа допущенных ошибок
3 балла	Задание выполнено, но требует серьезной доработки из-за значительного числа допущенных ошибок
4 балла	Задание выполнено в целом верно, но требует незначительной доработки
5 баллов	Задание выполнено полностью, не требует доработки

Примеры практических заданий

Задание 1

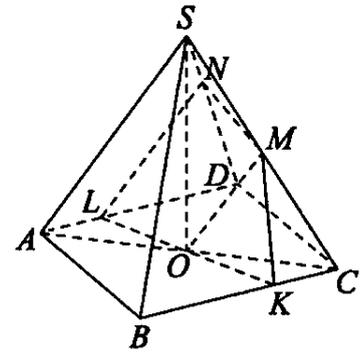
Цель задания: типология задания № 14, критерии и виды используемых шкал для оценки, специфика оценивания.

14. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основание $ABCD$ равны 10. Точка O – центра основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SA и проходящая через точку O , пересекает рёбра SC и SD в точках M и N соответственно. Точка N делит ребро SD в отношении $SN:ND = 2:3$.

а) Докажите, что точка M – середина ребра SC .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMN пересекает грань SBC .

Решение. а) Плоскости OMN и SAC пересекаются по прямой OM , параллельной прямой SA , поскольку прямая SA параллельна плоскости OMN . Точка O является серединой стороны AC треугольника SAC . Следовательно, отрезок OM является средней линией этого треугольника, а значит, точка M – середина ребра SC .



б) Обозначим точки пересечения плоскости OMN с рёбрами AD и BC через L и K соответственно.

Прямые SA и NL , содержащиеся в плоскости SAD , параллельны, поскольку плоскость OMN , содержащая прямую NL , параллельна прямой SA . Следовательно, треугольники SDA и NDL подобны с коэффициентом подобия $\frac{ND}{SD} = \frac{3}{5}$. Значит, $LD = \frac{3}{5}AD = 6$.

Треугольники AOL и COK равны, поскольку $\angle LAO = \angle KCO$, $\angle AOL = \angle COK$ и $AO = CO$. Следовательно, $CK = AL = AD - LD = 4$. Треугольник SBC равносторонний, поэтому $\angle SCB = 60^\circ$. Значит,

$$MK = \sqrt{CM^2 + CK^2 - 2CM \cdot CK \cdot \cos \angle MCK} = \sqrt{21}.$$

Ответ. б) $\sqrt{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,	1

ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

№14

Доказано:

- 1) Плоскость $L = (OMN)$
- 2) $\begin{matrix} \angle \parallel SA \\ SA \subset (ASC) \\ \angle \cap (ASC) = MO \end{matrix} \Rightarrow MO \parallel SA$
- 3) $SABCD$ - правильная $\Rightarrow ABCD$ - квадрат \Rightarrow
 O - середина AC (точкой пересечения диагональ квадрата делится пополам);
 O - центр основания $\Rightarrow AC \cap BD = O$
- 4) O - середина $AC \Rightarrow OM$ - средняя линия $\triangle SAC \Rightarrow M$ - середина стороны SC - т.т.д.

Решение:

- 1) Плоскость $L \cap (SDA) = NK$, $K \in DA$
- 2) $\begin{matrix} \angle \parallel SA \\ SA \subset (SDA) \\ \angle \cap (SDA) = NK \end{matrix} \Rightarrow NK \parallel SA$
- 3) Теорема Фалеса для $\triangle SDA$: $SA \parallel NK \Rightarrow \frac{DK}{NS} = \frac{NK}{SA} \Rightarrow \frac{DK}{NS} = \frac{3}{2}$
- 4) $\frac{DK}{KA} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{DK}{DA} = \frac{DK}{DK+KA} = \frac{DK}{DK+\frac{2}{3}DK} = \frac{3}{5} \Rightarrow DK = \frac{3}{5}DA = 6$; $KA = DA - DK = 4$,
аналогично $\frac{DK}{NS} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{DK}{DS} = \frac{3}{5} \Rightarrow DN = 6$; $NS = 4$
- 5) г.п. $KO \cap CB = E$ ($K, O \in L \Rightarrow KO \subset L \Rightarrow E \in L$)
- 6)
 - $\angle DOK = \angle EOB$ как вертикальные
 - $ABCD$ - квадр. $\Rightarrow AD \parallel BC$; DB - средняя $\Rightarrow \angle OBE = \angle OKD$ (как накрест лежащие)
 - $\angle DO = OB$ (из 90-го-го)
 - $\Rightarrow BE = DK = 6 \Rightarrow CE = CA - EB = 4$

$\Rightarrow \triangle DOK \cong \triangle BOE$
по 2 углам и обратной гипотенузе их гипотенуз
- 7) из 90-го-го $\Rightarrow CM = \frac{CE}{2} = 5$
- 8) $SC = CB = BS = 10$ по условию $\Rightarrow \triangle SCB$ - равносторонний $\Rightarrow \angle BCS = 60^\circ$
- 9) $M, E \in L \Rightarrow ME \subset L$
 $M, E \in (SCB) \Rightarrow ME \subset (SCB) \Rightarrow L \cap (SCB) = ME$
- 10) в $\triangle MCE$ по теореме косинусов:
 $ME = \sqrt{CM^2 + CE^2 - 2 \cdot CM \cdot CE \cdot \cos \angle MCE} =$
 $= \sqrt{CM^2 + CE^2 - 2 \cdot CM \cdot CE \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{CM^2 + CE^2 - CM \cdot CE} =$
 $= \sqrt{25 + 16 - 20} = \sqrt{21}$

Ответ: ~~17~~ $\sqrt{21}$

Рисунок 1. Пример решения задачи из ЕГЭ

Задание 2

Цель задания: типология задания № 17, критерии и виды используемых шкал для оценки, специфика оценивания.

Задание 17. Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB , если известно, что $AC = 10$ и $AB = 22$.

Решение.

а) Треугольник ANB равнобедренный с основанием AB . Следовательно, биссектриса NO угла ANB перпендикулярна прямой AB . Обозначим точку пересечения отрезков AB и NO через M . Тогда

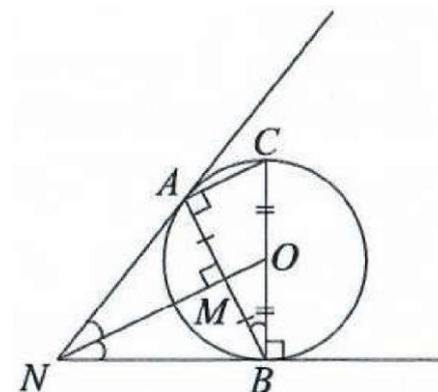
$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle MBO = 90^\circ - \angle MOB = \\ &= 90^\circ - \angle NOB = \angle ONB = \frac{\angle ANB}{2}.\end{aligned}$$

Значит, $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Высота NM равнобедренного треугольника ANB является его медианой. Значит, точка M – середина AB , а MO – средняя линия треугольника ABC , откуда получаем: $MB = \frac{AB}{2} = 11$, $MO = \frac{AC}{2} = 5$.

Прямоугольные треугольники MOB и MBN подобны с коэффициентом подобия $\frac{MB}{MO} = \frac{11}{5}$, откуда получаем: $NM = \frac{MB}{MO} \cdot MB = \frac{121}{5}$.

Ответ. б) $\frac{121}{5}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

№17

Доказано: $AB=CD=3$
 $BC=DE=4$

а) док-тв: $AC=CE$
 б) Найти BE , если $AD=6$

а) т.к. в окружности равные хорды стягивают равные дуги: $AB=CD$; $BC=DE$
 Тогда $\angle EAD = \angle BEC$ (впис, опир на равн дуги).
 Аналогично $\angle BEA = \angle DAC$
 Тогда в $\triangle AEC$ $\angle CEA = \angle CEB + \angle BEA = \angle EAD + \angle DAC = \angle CAE \Rightarrow \triangle AEC$ - р/б $\Rightarrow AE = EC$

б) $\angle DAC = \angle ACB$ (впис, опир на равные дуги.)
 Тогда, т.к. накрест лежащие углы равны $DA \parallel BC$
 Аналогично $BE \parallel DC$

Рассмотрим трапецию $ABCD$:
 Она равнобедренная, тогда $AK = \frac{AD+BC}{2} = 5$
 $HD = AD - AK = 1$
 Тогда по т. Пифагора: $AC = \sqrt{9-1} = \sqrt{8}$

Тогда по т. Пифагора $AC = \sqrt{8+25} = \sqrt{33}$

Рассмотрим равнобедренную трапецию $BCDE$:
 т.к. $AC = CE \Rightarrow CE = \sqrt{33}$

Опустим высоты CP и DQ , тогда $PQ = 3$ Пусть $QE = x$, $CP = y$, $BP = QE$

Тогда по т. Пиф.: $\begin{cases} (3+x)^2 + y^2 = 33 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ 9 + 6x + x^2 + 4 - x^2 = 33 \end{cases}$$

Тогда $x = \frac{33-13}{6} = \frac{20}{6}$

Тогда $BE = 3 + 2 \cdot x = 3 + \frac{40}{6} = 3 + \frac{20}{3} = \frac{29}{3}$

Ответ: $\frac{29}{3}$

Рисунок 2. Пример решения задачи из ЕГЭ

Программу составили:

Канд. физ.-мат. наук, с.н.с. РНОМЦ КМЦ СФУ

И.Н. Зотов

Канд. физ.-мат. наук, доцент

О.Н. Черепанова

Руководитель программы:

Канд. физ.-мат. наук, м.н.с. РНОМЦ КМЦ СФУ

И.Н. Зотов