

Директор НОЦ «Институт
непрерывного образования»

3 » *Иванов* 2025 г.

Красноярск 2025

УЧЕБНЫЙ ПЛАН
дополнительной профессиональной программы повышения квалификации
«Применение систем компьютерной алгебры и графики в исследованиях групп и многогранников»

Форма обучения: очно-заочная, с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.
Срок обучения: 38 часов.

№ п/п	Наименование модулей (курсов)	Общая трудоем- кость, ч	Всего контактн., ч	Контактные часы		СРС, ч	Формы контроля
				Лекции	Практ. и семинарские занятия		
1	Элементарные методы описания групп, их примеры и визуализация. Изоморфизм. Построение группы автоморфизмов	9	6	3	3	3	Зачет
2	Действие группы на множестве. Теоремы Силова. Абстрактные n-политопы и многогранники с условиями симметричности	9	6	3	3	3	Зачет
3	Поиск в группе её порождающего множества. Группы, порождённые инволюциями	9	6	3	3	3	Зачет
4	Атласы групп. Некоторые открытые вопросы	9	6	3	3	3	Зачет
	Итоговая аттестация	2				2	Зачет
	ИТОГО	38	24	12	12	14	

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН
дополнительной профессиональной программы повышения квалификации
«Применение систем компьютерной алгебры и графики в исследованиях групп и многогранников»

Категория слушателей: учителя математики, работающие в общеобразовательных учреждениях, преподаватели вуза.

Срок обучения: 38 часов.

Форма обучения: заочная, с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

Режим занятий: 6–10 часов в неделю.

№ п/п	Наименование модулей (курсов)	Общая трудоем- кость, ч	Всего контактн., ч	Контактные часы		СРС, ч	Результаты обучения
				Лекции	Практ. и семинарские занятия		
1	Элементарные методы описания групп, их примеры и визуализация. Изоморфизм. Построение группы автоморфизмов	9	6	3	3	3	PO1, PO7
2	Действие группы на множестве. Теоремы Силова. Абстрактные n -политопы и многогранники с условиями симметричности	9	6	3	3	3	PO1–PO3, PO6
3	Поиск в группе её порождающего множества. Группы, порождённые инволюциями	9	6	3	3	3	PO1, PO4
4	Атласы групп. Некоторые открытые вопросы	9	6	3	3	3	PO1, PO5
	Итоговая аттестация	2				2	PO1–PO7
	ИТОГО	38	24	12	12	14	

Календарный учебный график*
дополнительной профессиональной программы повышения квалификации
«Применение систем компьютерной алгебры и графики в исследованиях групп и многогранников»

№ п/п	Наименование модулей (курсов)	Неделя	Общая трудоем- кость, ч	Виды занятий (количество часов)			
				Лекция	Практ. и семинар- ские занятия	СРС	Итоговый контроль
1	Элементарные методы описания групп, их примеры и визуализация. Изоморфизм. Построение группы автоморфизмов	1	9	3	3	3	Зачет
2	Действие группы на множестве. Теоремы Силова. Абстрактные n-политопы и многогранники с условиями симметричности	2	9	3	3	3	Зачет
3	Поиск в группе её порождающего множества. Группы, порождённые инволюциями	3	9	3	3	3	Зачет
4	Атласы групп. Некоторые открытые вопросы	4	9	3	3	3	Зачет
	Итоговый контроль	5	2			2	Зачет
	Итого		38	12	12	14	

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

1.1. Аннотация программы

Знание основ применения систем компьютерной алгебры и приобретение опыта работы с некоторыми из них стало сегодня необходимым инструментом создания доказательства, полезно при проверке результатов и для приложений. Системы символьного программирования находят своё место в преподавании и классических разделов математики: 1) построение примеров, 2) нахождение границ применения компьютерных методов, 3) корректность использования систем компьютерной алгебры.

Программа повышения квалификации нацелена на приобретение и углубление знаний слушателей о современных методах решения задач алгебры и, в первую очередь, теории групп, а также связанных с ними задач геометрии многогранников. В частности, слушатели курса получают навыки построения групп симметрий многогранников, нахождения порождающего множества группы и создания «живых» трёхмерных фигур. Возможно, при чтении курса будут найдены ответы на некоторые открытые вопросы.

1.2. Цель программы

Цель программы повышения квалификации — совершенствование профессиональных компетенций преподавателей вуза, учителей математики и аспирантов в использовании современных алгебраических и геометрических методов вместе с применениями систем компьютерной алгебры для работы с обучающимися в основном и дополнительном математическом образовании на разных ступенях обучения. В частности, целью является наработка навыка применения электронных атласов групп и паркетогранников, а также умение доводить свои или коллег результаты до размещения в таких атласах.

1.3. Компетенции (трудовые функции) в соответствии с профессиональным стандартом (формирование новых или совершенствование имеющихся)

В условиях отсутствия действующих профессиональных стандартов в профессиональном образовании предполагается реализовать в данной программе подготовку к выполнению трудовых функций, представленных ниже (с учетом требований, сформулированных в ЕКСД, разделы «Квалификационные характеристики должностей руководителей и специалистов высшего профессионального и дополнительного профессионального образования», утвержденного приказом Минздравсоцразвития РФ от 23 июля 2010 № 541н (с изменениями от 09.04.2018 г.):

- Разработка и обновление содержания учебных курсов, дисциплин (модулей) программ всех уровней математического образования с учетом: порядка, установленного законодательством Российской Федерации об образовании; требований соответствующих ФГОС и(или) образовательных стандартов и современных достижений в области математики.

- Осуществление профессиональной ориентации школьников в области математического образования, пропаганды научно-технических знаний.

В соответствии с профессиональным стандартом 01.001 «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)» (утверждён приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации №544н от 18 октября 2013 (ред. от 05.08.2016), выделяются следующие трудовые действия, на формирование и совершенствование которых направлена программа повышения квалификации:

- А/01.6 Общепедагогическая функция. Обучение.
- В/04.6 Модуль «Предметное обучение. Математика».

1.4. Планируемые результаты обучения

Слушатель в результате обучения на программе повышения квалификации сможет получить согласно учебно-тематическому плану семь следующих результатов обучения.

РО1. Использовать системы компьютерной алгебры GAP, SageMath для решения стандартных задач университетских курсов «Алгебра» и «Аналитическая геометрия».

РО2. Находить основные представления группы — подстановочное, матричное, генетическим кодом, геометрическое и абстрактное на языке произведений групп — с помощью системы компьютерной алгебры и электронных атласов.

РО3. Находить в группе систему порождающих её элементов с заданными свойствами.

РО4. На основе построения орбит вершин многогранника при действии группы его симметрий создавать алгебраическую и «живую» модель многогранника.

РО5. Получать новые паркетогранники и их модели.

РО6. Описывать группу симметрий многогранника и применять её для построения новых соединений правильных пирамид.

РО7. Оформлять результат решения задач, используя системы компьютерной алгебры и графики (GAP, SageMath, TeX).

1.5. Категория слушателей

Научные сотрудники, преподаватели ВУЗов, реализующие образовательные программы в области математического образования; аспиранты, студенты старших курсов ВУЗов, учителя математики.

1.6. Требования к уровню подготовки поступающего на обучение

Слушатели должны иметь высшее образование (или обучаться на старших курсах) по специальностям, связанным с изучением и преподаванием математики на разных ступенях обучения (в вузе и старших классах общеобразовательных учреждений) по программам среднего профессионального или высшего образования.

Необходимо владение базовыми интернет-технологиями (веб-поиск, файловые сервисы и пр.), навыки работы в программах для организации видеоконференций.

1.7. Продолжительность обучения: 38 академических часов.

1.8. Форма обучения: очно-заочная с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

1.9. Требования к материально-техническому обеспечению, необходимому для реализации дополнительной профессиональной программы повышения квалификации (требования к аудитории, компьютерному классу, программному обеспечению)

Перечень необходимого программного обеспечения: средства просмотра презентаций Power Point; программа просмотра pdf-файлов Adobe Reader, online системы компьютерной алгебры: открытые GAP, SageMath; лицензионная Maple (двухнедельный бесплатный период).

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по программе повышения квалификации в очной форме: компьютер/ноутбук с предустановленным ПО, позволяющем осуществлять проведение видеоконференций.

1.10. Документ об образовании: удостоверение о повышении квалификации установленного образца.

II. ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

Обучение по программе повышения квалификации реализовано в формате очно-дистанционного обучения. Лекции и семинары проводятся преподавателем очно с параллельной трансляцией по системе видеоконференции. Изучение теоретического материала (СРС) предполагается до и после синхронной части работы.

2.1 Материально-технические условия реализации дисциплины

Синхронные занятия реализуются на базе инструментов видеоконференцсвязи и состоят из лекций и практических занятий, включающих в себя ответы на связанные с учебным материалом вопросы в формате дискуссий, а также групповую и индивидуальную работу. Для проведения синхронных занятий (вебинаров со спикерами) применяется либо программа телеконференций Zoom, либо её аналоги.

2.2 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Программа реализуется очно-заочно, с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, и включает занятия лекционного типа, семинарские занятия и самостоятельную работу.

Все методические материалы и рекомендации представлены в электронном курсе в системе электронного обучения СФУ «е-Курсы»: (<https://e.sfu-kras.ru/>).

2.3 Содержание комплекта учебно-методических материалов

Учебно-методический комплекс содержит: материалы лекций по программе; методические рекомендации по решению задач; дополнительные ссылки и материалы в формате PDF по темам курса для самостоятельного изучения; списки основной и дополнительной литературы по курсу; набор ссылок на внешние образовательные ресурсы, а также на создаваемые сегодня – находящиеся в стадии опубликования — инструменты исследования групп и многогранников.

3.3 Виды и содержание самостоятельной работы

Самостоятельная работа слушателей программы ориентирована на практическое применение изученных теоретических понятий и заключается в решении задач, формулировка которых, а также методические указания к их решению приводятся в электронном курсе в системе электронного обучения СФУ (<https://e.sfu-kras.ru/>). Также слушатели самостоятельно проводят анализ и систематизацию изложенного на лекциях материала в рамках выполнения практических заданий.

Результативность самостоятельной работы слушателей программы определяется умением решать предложенные в курсе и аналогичные задачи по разделам курса.

III. КАДРОВЫЕ УСЛОВИЯ

Руководитель программы:

Тимофеев Алексей Викторович, доктор физ.-матем. наук.

Преподаватели программы:

Тимофеев Алексей Викторович, доктор физ.-матем. наук.

IV. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

4.1. Учебно-методическое обеспечение, в т.ч. электронные ресурсы в корпоративной сети СФУ и сети Интернет

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1972, 1977, 1982, 1996 (любое издание).

2. Карпова Е.С., Тимофеев А.В. О разбиениях усечённого икосаэдра на паркетогранники // Чебышевский сборник. – Т. 19. – № 2 (2018). – С. 447–476. – URL: <https://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/501/440>.

3. Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп: Пер. с англ. / Под ред. Ю.И. Мерзлякова. – М. Наука, 1980 – 240 с.

4. Коновалов А.Б. Система компьютерной алгебры GAP 4.7 (Brief GAP Guidebook in Russian). Редакция 3.1.2 6 марта 2014. – URL: https://drive.google.com/file/d/18_zXrBBTN40bT0NQd7Txc1sxzwARKAUD/view?usp=sharing

5. Курош А.Г. Теория групп. – М., Наука, 1967 – 648 с.

6. Мазуров В.Д. О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сиб. матем. журн., 44:1 (2003), 193–198.

7. Макосий А.И., Тимофеев А.В. Атлас конечных простых $(2 \times 2, 2)$ -порождённых групп. – URL: <https://ftp.kspu.ru/moodle/t/index.html>.

8. Макосий А.И., Тимофеев А.В. О мазуровских тройках спорадической группы В и гамильтоновых циклах графа Кэли // Дискрет. Матем., 20:1 (2008), 87–93.

9. Маслова Н.В., Белоусов И.Н., Минигулов Н.А. Открытые проблемы, сформулированные на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26. – №3. – С. 275–285.

10. Простые конечные спорадические группы, порожденные тремя инволюциями. – URL: <http://icm.krasn.ru/refextra.php?id=2860>.

11. Смирнов Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2018. – 56 с.

12. Тимофеев А.В. Инволюции конечных групп и выпуклые правильные многогранники: автореф. дисс. ... доктора физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 2009.

13. Тимофеев А.В. К перечню выпуклых правильных многогранников // Современные проблемы математики и механики. VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова / Под ред. И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова. 2011. – М.: Изд-во МГУ. – С. 155–170.
14. Тимофеев А.В. О порождающих тройках инволюций больших спорадических групп. Дискрет. матем., 15:2 (2003), 103–112.
15. Холл М. Теория групп. – М., Изд-во иностранной литературы, 1962 – 488 с.
16. Шмидт О.Ю. Абстрактная теория групп. – Киев, 1916; М., 1933, 1959 (любое издание).
17. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra. – URL: <https://www.gap-system.org/>.
18. Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. – URL: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra/>.
19. McMullen P., Schulte E. Abstract Regular Polytopes, Cambridge University Press, 2002.
20. Robert Wilson, Peter Walsh, Jonathan Tripp, Ibrahim Suleiman, Stephen Rogers, Richard Parker, Simon Norton, Simon Nickerson, Steve Linton, John Bray and Rachel Abbott, ATLAS of Finite Group Representations. – URL: <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/>.
21. Для слушателей курса на google-диске автора, https://drive.google.com/drive/folders/1l5moygF40p8BygF2TNrUSv-loagpumAI?usp=drive_link, собрана и будет пополняться – более оперативно, чем официальный электронный курс СФУ – электронная библиотека. Там расположена и методичка А.Б. Коновалова (четвёртая в настоящем списке).

V. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

5.1. Формы аттестации, оценочные материалы, методические материалы

Программа предусматривает проведение текущей и итоговой аттестации. Текущая аттестация слушателей проводится на основе оценки активности и выполнении контрольных заданий.

Итоговой аттестационной работой является письменная контрольная работа по пройденным темам.

5.2. Требования и содержание итоговой аттестации

Основанием для аттестации слушателя по данной программе является:

- выполнение на положительную оценку всех текущих заданий;
- выполнение на положительную оценку письменной контрольной работы.

В контрольную работу входят либо расположенные ниже (стр. 16–18) задачи, либо аналоги этих задач, либо — при заметной инициативе квалифицированного слушателя — индивидуальное задание.

Критерии оценки освоения обучающимися дополнительной профессиональной программы

По результатам итоговых аттестационных испытаний, выставляются отметки по шкале «зачтено – не зачтено».

«Зачтено» заслуживает обучающийся, показавший освоение планируемых результатов (знаний, умений, компетенций), предусмотренных программой, изучивших литературу, рекомендованную программой, способный к самостоятельному пополнению и обновлению знаний в ходе дальнейшего обучения и профессиональной деятельности.

«Не зачтено» выставляется обучающемуся, не показавшему освоение планируемых результатов (знаний, умений, компетенций), предусмотренных программой, допустившему серьезные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий, не справившемуся с выполнением итоговой аттестационной работы.

Оценка по итоговой аттестации определяется суммированием баллов, полученных при выполнении текущих заданий и письменной контрольной работы. Для допуска к итоговой аттестации необходимо набрать 60 % и более от общего количества баллов (24 и более баллов). В таблице приведены задания – точнее схемы заданий, – входящих в контрольную работу. Для получения оценки «зачтено» необходимо пройти итоговую аттестацию в форме доклада (сообщения) семинару «Группы и паркетогранники», <https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2025> .

Оценка видов работ в баллах по итоговой аттестации

Выполняемая работа	Всего баллов	Количество баллов в разрезе видов деятельности	
		задания	защита
Задание «Нахождение основных представлений группы движений трёхмерного евклидова пространства вручную и проверка системой компьютерной алгебры»	10	5	5
Задание «Нахождение порождающего группу множества с заданными свойствами»	10	5	5
Задание «Построение орбит фундаментальных вершин, рёбер и граней при действии группы движений»	10	5	5
Задание «Конечные гомоморфные образы кристаллографических групп»	10	5	5
Итого	40	20	20

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
дополнительной профессиональной программы повышения
квалификации
«Применение систем компьютерной алгебры и графики
в исследованиях групп и многогранников»

1. Аннотация

Знание основ применения систем компьютерной алгебры и приобретение опыта работы с некоторыми из них стало сегодня необходимым инструментом создания доказательства, полезно при проверке результатов и для приложений. Системы символьного программирования находят своё место в преподавании и классических разделов математики: 1) построение примеров, 2) нахождение границ применения компьютерных методов, 3) корректность использования систем компьютерной алгебры.

Программа повышения квалификации нацелена на приобретение и углубление знаний слушателей о современных методах решения задач алгебры и, в первую очередь, теории групп, а также связанных с ними задач геометрии многогранников. В частности, слушатели курса получают навыки построения групп симметрий многогранников, нахождения порождающего множества группы и создания «живых» трёхмерных фигур. Возможно, при чтении курса будут найдены ответы на некоторые открытые вопросы.

Цель модуля (результаты обучения):

В результате успешного освоения дисциплины (модуля) слушатели будут способны:

PO1. Использовать системы компьютерной алгебры GAP, SageMath для решения стандартных задач университетских курсов «Алгебра» и «Аналитическая геометрия».

PO2. Находить основные представления группы – подстановочное, матричное, генетическим кодом, геометрическое и абстрактное на языке произведений групп – с помощью системы компьютерной алгебры и электронных атласов.

PO3. Находить в группе систему порождающих её элементов с заданными свойствами.

PO4. На основе построения орбит вершин многогранника при действии группы его симметрий создавать алгебраическую и «живую» модель многогранника.

PO5. Получать новые паркетограммы и их модели.

PO6. Описывать группу симметрий многогранника и применять её для построения новых соединений правильных пирамид.

PO7. Оформлять результат решения задач, используя системы компьютерной алгебры и графики (GAP, SageMath).

2. Содержание

№, наименование темы	Содержание лекций (кол-во часов)	Наименование практических занятий (кол-во часов)	Виды СРС (кол-во часов)
1. Элементарные методы описания групп, их примеры и визуализация. Изоморфизм. Построение группы автоморфизмов (9 ч.)			
Тема 1.1. Аксиоматика. Изоморфизм. Примеры групп. Описание групп данного (малого) порядка (3 ч.)	Основные определения свойства и теоремы темы «Определение и важнейшие части группы». Примеры их нахождения вручную и с помощью систем компьютерной алгебры и графики (1 ч.)	Решение задач темы 1.1 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущий заданий по теме (1 ч.)
Тема 1.2. Основные представления группы (3 ч.)	Основные определения свойства и теоремы темы «Основные представления группы». Примеры решения задач создания представления группы: подстановочного, матричного, генетическим кодом, геометрического и абстрактного на языке произведений групп (1 ч.)	Решение задач темы 1.2 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущий заданий по теме (1 ч.)
Тема 1.3. Построение группы автоморфизмов (3 ч.)	Гомоморфизмы и факторы. Теоремы о гомоморфизмах. Построение группы симметрий многогранника (1 ч.)	Решение задач темы 1.3 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущий заданий по теме (1 ч.)
2. Действие группы на множестве. Теоремы Силова. Абстрактные n-политопы и многогранники с условиями симметричности (9 ч.)			
Тема 2.1. Теорема Силова о существовании, сопряжённости, вложении и количестве максимальных p -подгрупп конечной группы (3 ч.)	Доказательство теоремы о существовании максимальных (силовских) p -подгрупп конечной группы, p – простое число. Нахождение силовских p -подгрупп с помощью системы компьютерной алгебры (1 ч.)	Решение задач темы 2.1 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущий заданий по теме (1 ч.)
Тема 2.2. Правильные многогранники в n -мерном евклидовом пространстве (3 ч.)	Применение групп симметрий для доказательства теоремы о классификации правильных тел каждой размерности. Идея доказательства на примерах применения групп правильных многогранников	Решение задач темы 2.2 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущий заданий по теме (1 ч.)

№, наименование темы	Содержание лекций (кол-во часов)	Наименование практических занятий (кол-во часов)	Виды СРС (кол-во часов)
	размерности 2, 3, 4. Примеры решения задач (1 ч.)		
Тема 2.3. Абстрактные n -политопы и многогранники с условиями симметричности (3 ч.)	Регулярные и нерегулярные n -политопы. Взаимно однозначное соответствие между регулярными n -политопами и некоторыми порождёнными n инволюциями группами. Примеры соответствия для $n=2, 3, 4$. Примеры решения задач (1 ч.)	Решение задач темы 2.3 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (1 ч.)
3. Поиск в группе её порождающего множества. Группы, порождённые инволюциями (9 ч.)			
Тема 3.1. Группы и графы Коксетера (3 ч.)	Доказательство существования инволюций, порождающих группу и нахождение их в явном виде. Примеры решения задач (1 ч.)	Решение задач темы 3.1 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (1 ч.)
Тема 3.2. Поиск порождающих группу $(2 \times 2, 2)$ -троек инволюций (3 ч.)	Основные методы поиска порождающих группу $(2 \times 2, 2)$ -троек инволюций: 1) прямой перебор троек инволюций; 2) представление элементов известного порождающего множества в виде произведения инволюций $(2 \times 2, 2)$ -тройки; 3) применение свойств конкретной группы либо для нахождения порождающей её $(2 \times 2, 2)$ -тройки, либо для доказательства её отсутствия Примеры решения задач (1 ч.)	Решение задач темы 3.2 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (1 ч.)
Тема 3.3. Состоящие из инволюций порождающие множества групп движений 3-мерного евклидова пространства. (3 ч.)	Теорема о конечных группах движений 3-мерного евклидова пространства. Кристаллографические группы и их конечные гомоморфные образы (1 ч.)	Решение задач темы 3.3 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущих заданий по теме (1 ч.)
4. Атласы групп. Некоторые открытые вопросы (9 ч.)			
Тема 4.1. Атласы групп в учебниках и системах	Основные определения свойства и теоремы темы «Атласы групп в учебниках и	Решение задач темы 4.1 (1 ч.)	Изучение учебных материалов

№, наименование темы	Содержание лекций (кол-во часов)	Наименование практических занятий (кол-во часов)	Виды СРС (кол-во часов)
компьютерной алгебры (3 ч.)	системах компьютерной алгебры». Примеры решения задач (1 ч.)		по теме, выполнение текущий заданий по теме (1 ч.)
Тема 4.2. Атласы (2x2,2)-троек инволюций конечных простых групп (3 ч.)	Основные определения свойства и теоремы темы «Атласы (2x2,2)-троек инволюций конечных простых групп». Примеры решения задач (1 ч.)	Решение задач темы 4.2 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущий заданий по теме (1 ч.)
Тема 4.3. Атлас групп движений 3-мерного евклидова пространства (3 ч.)	Основные определения свойства и теоремы темы «Атлас групп движений 3-мерного евклидова пространства». Примеры решения задач (1 ч.)	Решение задач темы 4.3 (1 ч.)	Изучение учебных материалов по теме, выполнение текущий заданий по теме (1 ч.)
Итоговая аттестация (2 ч.)			
Итоговая аттестация (2 ч.)			Контрольная работа (2 ч.)

3. Оценка качества освоения дисциплины (формы аттестации, оценочные и методические материалы)

Форма аттестации — зачет. Основанием для допуска к итоговой аттестации является выполнение не менее 60 % промежуточных заданий слушателем по ходу изучения курса.

Формой итоговой аттестации является доклад (сообщение) семинару «Группы и паркетогранники».

По результатам выполнения текущих заданий и итоговой аттестации слушателю выставляется оценка по шкале «зачтено – не зачтено», которая является основанием для аттестации или не аттестации по программе.

Перечень заданий и/или контрольных вопросов

Примеры практических заданий

Задание 1

Цель задания: закрепление теоретических знаний темы «Элементарные методы описания групп, их примеры и визуализация. Изоморфизм. Построение группы автоморфизмов».

1. Докажите, что для множества M с ассоциативной операцией $*$ равносильны условия: 1) $(M, *)$ — группа; 2) для каждой пары a, b элементов из M каждое из уравнений $a*x=b$ и $x*a=b$ имеет единственное

решение в M ; 3) для каждой пары a, b элементов из M каждое из уравнений $a * x = b$ и $x * a = b$ имеет по крайней мере одно решение в M .

2. Докажите:

1) Группами являются:

а) множество всех комплексных чисел, имеющих единичный модуль, с операцией умножения;

б) полуинтервал $[0,1)$ множества действительных чисел R с операцией $*$ такой, что $a * b$ есть дробная часть числа $a + b$ не имеет решений в целых числах.

2) Группы пунктов а) и б) изоморфны.

3. Для любого натурального числа n множество всех комплексных корней степени n из единицы с обычной операцией умножения комплексных чисел есть циклическая группа порядка n . Она обозначается Z_n .

4. Докажите, что произвольная циклическая группа изоморфна либо Z_n для некоторого натурального n , либо Z^+ .

5. Докажите, что множество $K = \{e, a, b, c\}$ является нециклической абелевой группой относительно операции умножения, заданной следующей таблицей

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	e	a

6. Построить графы Кэли всех групп, состоящих из 4, 6 и 10 элементов. Если возможно, то рассмотреть порождающие множества, состоящие из инволюций.

Задание 2

Цель задания: закрепление теоретических знаний темы «Действие группы на множестве. Теоремы Силова. Абстрактные n -политопы и многогранники с условиями симметричности».

1. Пусть G — конечная группа и её порядок $|G|$ делится на простое число p . Пусть P — силовская p -подгруппа группы G . Доказать, что число силовских p -подгрупп группы G равно индексу $|G:N_G(P)|$.

2. Сколько элементов порядка 7 содержит простая группа порядка 168?

3. Построить абстрактный политоп ранга 1 и абстрактные политопы ранга 2, соответствующие правильным n -угольникам, $n=3, 4, 5, 6, 10, 12$.

4. Построить абстрактные политопы ранга 3, соответствующие соединениям не более четырёх правильных пирамид.

5. Найти регулярные и нерегулярные соединения правильных пирамид.

6. Построить абстрактный политоп P ранга 4, соответствующий четырёхмерной треугольной призме, и построить $\text{Aut } P$.

7. Составить таблицу сложения двугранных углов таких, как у правильных пирамид и их выпуклых соединений. Найти

символьные и округлённые значения слагаемых и сумм с помощью формулы $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$, где a, b, c — плоские углы трёхгранного угла и C — двугранный угол, противолежащий плоскому углу c .

8. Найти матрицу перехода от системы координат, начало которой лежит в центре тяжести многогранника, а координатные оси согласованы с осями и/или плоскостями симметрии многогранника, к системе координат, плоскость xOy которой лежит в плоскости сверхфундаментальной грани, ось абсцисс содержит вершину этой грани с наименьшим номером, а начало координат лежит в центре тяжести грани. Рассмотреть правильные пирамиды и их выпуклые соединения.

Задание 3

Цель задания: закрепление теоретических знаний темы «Поиск в группе её порождающего множества. Группы, порождённые инволюциями»

1. Построить классы сопряжённых инволюций групп диэдра.
2. Пусть G — группа, помещённая в систему компьютерной алгебры, i — её инволюция. Построить централизатор $C_G(i)$ и класс i^G сопряжённых с i инволюций.
3. Построение списка представителей классов сопряжённых инволюций группы.
4. Построение списка инволюций группы.
5. Построение расширенного централизатора элемента группы.

Задание 4

Цель задания: закрепление теоретических знаний темы «Атласы групп. Некоторые открытые вопросы».

1. С помощью Атласа конечных групп движений евклидова пространства (Тимофеев А.В. Равнорёберные паркетограммы и близкие антипризмы многогранники // XV Междунар. школа-конф. по теории групп, посвященная 95-летию со дня рождения М.И. Каргаполова, г. Екатеринбург, 21–28 июля 2024 г., <https://group.imm.uran.ru/RegistrRepor>) построить все выпуклые соединения более 19 и 20 правильных пирамид с единичными рёбрами и условием: ребро соединения единичное или вдвое длиннее.
2. Для некоторой группы G Атласа конечных простых неабелевых $(2 \times 2, 2)$ -порождённых групп (<https://ftp.kspu.ru/moodle/t/index.html>) построить такой регулярный 3-политоп P , что $\text{Aut}(P) = G$.
3. Доказать, что спорадические группы J_1 и J_2 обладают генетическими кодами:

$$J_1 = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^2, (ac)^3, (bc)^7, (abc)^{19}, (bcba)^{15} \rangle,$$

$$J_2 = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^2, (ac)^3, (bc)^{15}, (abcb)^7, (abcbcb)^5 \rangle$$

и

$$A_5 \cong \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ac)^2, (bc)^3, (ab)^5, (abcb)^3 \rangle,$$

$$C_2 \times A_5 \cong \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ac)^2, (bc)^3, (ab)^5 \rangle,$$

Критерии оценивания заданий

Баллы	Критерий
1 балл	Задание практически не выполнено, допущены серьезные и грубые ошибки
2 балла	Задание выполнено частично, и требует серьезной доработки из-за значительного числа допущенных ошибок
3 балла	Задание выполнено, но требует серьезной доработки из-за значительного числа допущенных ошибок
4 балла	Задание выполнено в целом верно, но требует незначительной доработки
5 баллов	Задание выполнено полностью, не требует доработки

Задания для самостоятельной работы

В самостоятельную работу входит изучение материала курса, просмотр записей видеолекций занятий; закрепление заданий с практических занятий; выполнение тестовых заданий.

Программу составили:

Доктор физ.-мат. наук, доцент



А.В. Тимофеев

Руководитель программы:

Доктор физ.-мат. наук, доцент



А.В. Тимофеев